Periodo de tangente

¿Por qué el periodo de tangente es diferente al de seno y coseno?

Para ver periodicidad de la $\tan(x)$, tenemos que ver si existe algo tal que

$$\tan(x + \text{ algo}) = \tan(x) \tag{1}$$

Trataremos de manipular esta igualdad para poder descifrar qué valores debería tomar p para que la ecuación se cumpla.

Usaremos las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta
\end{aligned}$$

No te asustes! pues memorizarlas es fácil: nota que α y β se van intercalando,
y la forma en la que se pone la fórmula es la siguiente:

el de $\sin$ es " seno igual a seno coseno, coseno seno"

y el de $\cos$ es "coseno es igual a coseno coseno, seno seno"

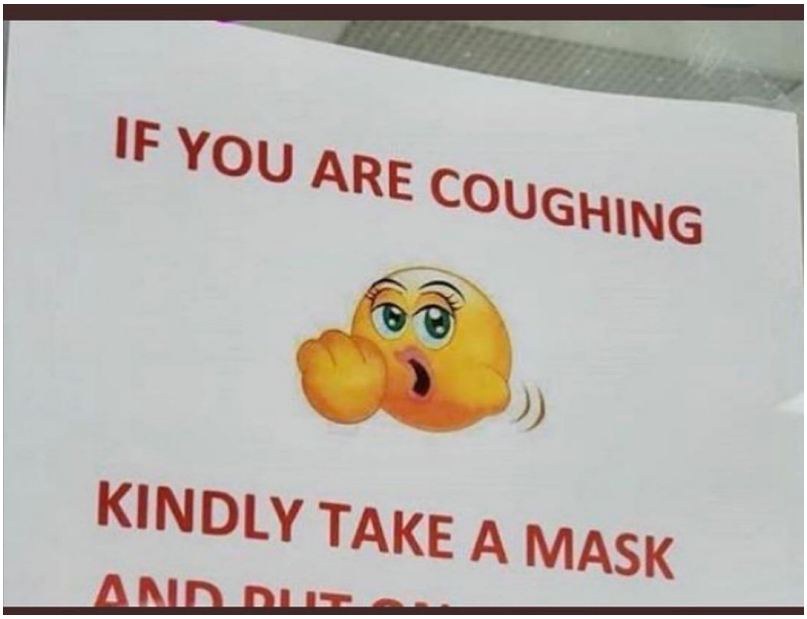
ahora , para ver cómo van los signos usaremos una mnemotecnia chistosa para recordar los signos de la fórmula de coseno y, sabiéndote estos, los del seno los obtienes por descarte.

Observa que en el seno el signo se "mantiene", es decir la SUMA de α y β es igual a la SUMA de otras cosas, la RESTA de α y β es igual a la RESTA de otras cosas. En el coseno pasa lo contrario.

Como pasa lo contrario, tienes que recordar lo siguiente

$$\text{"cuando toses } + \text{ tienes } - \text{ salud"}$$

es decir, cuando toses y haces "¡cos, cos!"



Ahora que manejas estas fórmulas, manipulemos $\tan(x+algo)$ y, para escribir menos, digamos que $algo = p$, ahora p es nuestra incógnita

$$\text{así } \tan(x+algo) = \tan(x+p) = \frac{sen(x+p)}{\cos(x+p)}$$

$$\text{usamos las identidades que aprendimos}$$

$$\frac{sen(x+p)}{\cos(x+p)} = \frac{sen(x)\cos(p)+\cos(x)\sin(p)}{\cos(x)\cos(p)-\sin(x)\sin(p)} \text{ multipliquemos por un 1 conveniente}$$

$$\text{usaremos } 1 = \frac{\frac{1}{\cos(x)\cos(p)}}{\frac{1}{\cos(x)\cos(p)}}$$

$$\text{así la ecuación nos queda}$$

$$\left(\frac{sen(x)\cos(p)+\cos(x)\sin(p)}{\cos(x)\cos(p)-\sin(x)\sin(p)}\right)\cdot 1 = \left(\frac{sen(x)\cos(p)+\cos(x)\sin(p)}{\cos(x)\cos(p)-\sin(x)\sin(p)}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{\cos(x)\cos(p)}}{\frac{1}{\cos(x)\cos(p)}}\right)$$

$$\text{multiplicando y usando que } \tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \text{ y } \tan(p) = \frac{sen(p)}{\cos(p)} \text{ nos queda que}$$

$$\tan(x+algo) = \tan(x+p) = \frac{sen(x+p)}{\cos(x+p)} = \frac{\tan(x)+\tan(p)}{1-\tan(x)\tan(p)} \qquad (2)$$

Usando la ecuación (1) y (2)

$$\tan(x+p) = \frac{\tan(x)+\tan(p)}{1-\tan(x)\tan(p)} = \tan(x)$$

$\text{dividiendo por } 1-\tan(x)\tan(p)$

$\left(\text{ que es lo mismo que usar el 1 conveniente } 1 = \frac{\frac{1}{1-\tan(x)\tan(p)}}{\frac{1}{1-\tan(x)\tan(p)}}\right)$

nos queda

$$\tan(x)+\tan(p) = \tan(x)(1-\tan(x)\tan(p))$$

$\text{multiplicando y reordenando obtenemos}$

$$\tan(p)+\tan^2(x)\tan(p) = \tan(x)-\tan(x) = 0$$

factorizando

$$\tan(p)(1+\tan^2(x)) = 0$$

Ahora nos preguntamos, ¿Cómo esta ecuación me puede dar cero?
para que me de cero alguno de los factores tiene que ser cero!

notemos que $(1+\tan^2(x))$ nunca puede ser igual a cero pues es necesario que al 1 se le reste 1 y el término que suma al uno ($\tan^2(x)$) está al cuadrado, es decir, nunca va a ser negativo.

Entonces necesariamente $\tan(p)$ **tiene que ser igual a cero** con esto obtenemos nuestra ecuación final y más importante:

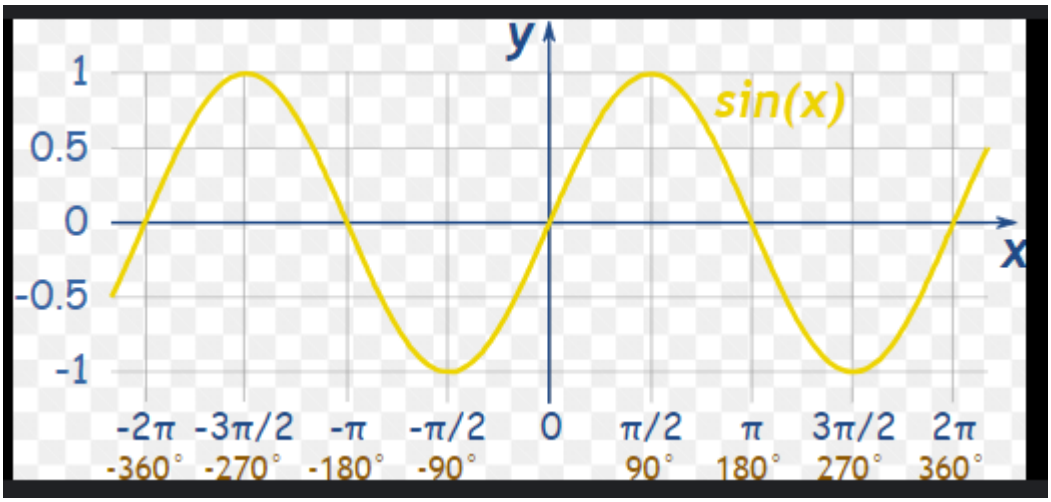
$$\tan(p) = 0 \tag{4}$$

¿para qué valores de p la ecuación nos da cero?
para ver esto usaremos la definición de tangente

$$\tan(p) = \frac{\sin(p)}{\cos(p)} = 0$$

es decir $sen(p)$ tiene que ser cero, ¿para qué valores el seno es cero?

$$\sin(p) = 0 \iff p = k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Concluimos que $\tan(x+p) = \tan(x)$ cuando p sea de la forma $p = k\pi$
En otras palabras, $\tan(x)$ es π periódica.